فرآیند کوتاهترین مسیر تصادفی

فاطمه پوراختریه
محقق اداره آمار اقتصادی بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران

چکیده

در این مقاله، فرآیند کوتاهترین مسیر روی گرافها در نظر گرفته شده است. در این فرآیند مقادیر تعریف شده روی هر کمان، تصادفی فرض می شوند. ضمنا در این مطالعه شرایطی در نظر گرفته می شود که متحرک در حال طی مسیر اطلاعاتی را کسب می کند و این اطلاعات بر روی توزیع مقادیر کمانها تاثیر می گذارد. هدف یافتن طرحی است که بتواند از یک گره مبداء به گره مقصد با کمترین متوسط هزینه ما را رهیابی کند.

برای این منظور مدل ریاضی کوتاهترین مسیر تصادفی به طور بازگشتی (SSPPR) شرح داده می شود و متوسط طول این مدل محاسبه می گردد. در این مدلها شخص با مواجه شدن کمانی غیر فعال و همچنین دستیابی به اطلاعات جدید مسیرهای بازگشت متعددی انتخاب می کند.

مقدمه

فرآیند کوتاهترین مسیر اولین بار توسط Ford (۱۹۵۶) فرمولبندی شد. Erdos & Renyi (۱۹۵۹، ۱۹۶۰، ۱۹۶۱) پیشگامان نظریه گرافهای تصادفی می‌باشند. فرآیندهای کوتاهترین مسیر بسته به مورد استعمال چندین نوع می‌باشند. Mirchandani (۱۹۷۶) و Frank (۱۹۶۹) و Croucher (۱۹۷۸) فرآیند کوتاهترین مسیر در شبکه با کمانهای احتمالی را مطالعه کرده اند.

Andreatta & Romeo (۱۹۸۸) فرآیند کوتاهترین مسیر تصادفی به طور بازگشتی، که در آن کمانها می توانند فعال و یا بی اثر باشند، ارائه کرده اند.

۱- تئوری گراف

ابتدا تعاریف نظریه گراف و همچنین مفاهیم فرآیند تصادفی بیان می‌شود.

گراف[1]: گراف G سه تایی مرتب $G:(V(G), E(G), \psi(G))$ می‌باشد که برای هریال[2] $E(G)$ یک جفت نامرتب از راسهای[3] $V(G)$ را با تابع تلاقی $\psi(G): E \longrightarrow V \times V$ متناظر می‌کند.

مسیر[4]: راه $W = v_0e_0\, v_1e_1 \ldots e_kv_k$ دنباله غیر تهی و متناهی از گره‌ها و یالها بطور متناوب می‌باشد. اگر در راه W، یالها از هم جدا باشند یک جاده[5] از v_0 به v_k است. جاده v_0 به v_k را یک مسیر می‌نامند اگر گره‌های آن از هم مجزا باشند.

گراف جهتدار[6]: در گراف $D:(V(D), A(D), \psi(D))$ اگر $\psi(D)=(v,w)$ انگاه v سر[7]یال و w ته[8]یال می‌باشد و جهت از v به w است.

گراف وزندار[9] در گراف G یا گراف جهتدار D، یک یا چند تابع حقیقی روی مجموعه کمانهای آن به عنوان وزن کمانها تعریف می‌شود (زمان، هزینه و ...).

گراف تصادفی[10] : هدف تبدیل مجموعه G (مجموعه تمام گرافهای روی V) به یک فضای احتمال است. با چند آزمایش تصادفی مستقل تصمیم گرفته می‌شود که e یالی از G باشد یا نباشد. در این صورت G یک گراف تصادفی روی V نامیده می‌شود.

1. Graph
2. Edge
3. Nods
4. Path
5. Trail
6. Directed Graph
7. Head
8. Tail
9. Weighted Graph
10. Random Graph

شبکه تصادفی [1] : گراف وزنداری که به صورت $G : (N,A,P,S,t)$ با $|N| = n$ ، $|A| = m$ و P توزیع احتمالی مقادیر کمانهای تصادفی و دو گره مجزای S و t به ترتیب گره مبداء و گره مقصد، نمایش داده می شود را شبکه تصادفی می گویند. کمانها می توانند جهتدار و یا بدون جهت باشند [۲] .

۱-۱مساله بهینه سازی [2]:

دستیابی به بهترین نتیجه در شرایط داده شده را بهینه سازی گویند. روشهای جستجوی بهینه و رسیدن به بهترین جواب به صورت بخشی از تحقیق در عملیات می باشند.

روشهای تحقیق در عملیات

- روشهای برنامه‌ریزی ریاضی (تابعی از چند متغیر با قیدها می باشد)
- روشهای فرآیند تصادفی (مجموعه ای از متغیرهای تصادفی با توزیع احتمال می باشد)
- روشهای آماری (استنباط به وسیلهٔتجزیه تحلیل داده‌ها می باشد)

تابع هدف : هدف از بهینه سازی انتخاب بهترین طرح می باشد. معیاری که طرح، نسبت به آن بهینه می شود را به صورت تابعی از متغیرهای طراحی بیان می کنند و آن را تابع هدف می نامند [۵] .

1. Stochastic Network
2 . Optimization

۱-۲ فرآیند مارکف[1]:

فرآیندی است با این خاصیت که ، اگر مقدار X_t داده شده باشد، مقادیر X_s، $S > t$ به مقادیر X_u ، $u > t$ ، بستگی ندارد. یعنی احتمال رفتاری از فرآیند در آینده، وقتی وضعیت فعلی آن دقیقا معلوم است، با اطلاعی از رفتار آن در گذشته تغییر نمی کند.

زنجیر مارکف با زمان گسسته[2] $\{ X_n \}$ یک فرآیند تصادفی مارکف است که فضای وضعیت آن مجموعه ای شما را یا متناهی بوده و در آن $I = (۰ , ۱ , ۲ , ...)$، مقدار X_n را می‌توان نتیجه آزمایش nام نامید.

احتمال انتقال یک‌مرحله‌ای بصورت $P_{ij}^{n,n+1} = P_r\{X_{n+1} = j / X_n = i\} = P_{ij}$ بیان می‌شود.

وضعیت بازگشتی[3] : وضعیت دلخواه ولی ثابت i را در نظر بگیرید، به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ ، تعریف می شود: $f_{ii} = P_r\{X_n = i, X_\nu \neq i, \nu = ۱, ۲, ..., n-۱ / X_۰ = i\}$

f_{ii} احتمال آن است که با شروع از وضعیت i ، اولین بازگشت به وضعیت i در انتقال nام رخ می دهد واضح است که $f_{ii}^{۱} = p_{ii}$ و f_{ii}^{n} را می توان با فرمول زیر محاسبه کرد:

$$p_{ii}^{n} = \sum_{k=۰}^{n} f_{ii}^{k} p_{ii}^{n-k} \qquad n \geq ۱$$

گوئیم وضعیت i بازگشتی است، اگر و فقط اگر $\sum f_{ii}^{n} = ۱$ ، یعنی با شروع از وضعیت i، احتمال بازگشت به وضعیت i پس از مدت زمانی متناهی یک باشد [۶] .

۱-۳ رابطه بین زنجیرهای مارکف زمان گسسته و گرافهای جهتدار:

زنجیرهای مارکف زمان گسسته به عنوان یکی از کاربردهای نظریه گرافهای جهتدار مطرح می‌شود. مساله این است که آیا می توان از یک حالت مفروض به حالت دیگری رفت یا خیر و اگر چنین است کوتاهترین زمان برای تغییر حالت چیست؟ بنابراین نه تنها

1. Markov Process
2. Discrete Time Markov Chain
3. Recurrent

احتمالات p_{ij}، بلکه مثبت بودن آنها نیز مورد توجه است و این مساله با گرافهای تصادفی جهتدار نشان داده می شود. که در آن رئوس معرف حالات و کمانها، تغییر وضعیت از یک حالت به حالت دیگر می باشند. در گراف جهتدار یک کمان از V_i به V_j رسم می شود اگر و فقط اگر $p_{ij} \neq 0$ این گراف جهتدار گراف جهتدار وابسته به زنجیر مارکوف می گویند.

در یک زنجیر مارکف می توان از یک حالت E_i به حالت E_j رفت اگر و فقط اگر در گراف جهتدار وابسته، مسیری از V_i به V_j وجود داشته باشد، و کمترین زمان برای این منظور طول کوتاهترین مسیر از V_i به V_j است.

زنجیر مارکفی که از هر حالت آن بتوان به هر حالت دیگر رفت، یک زنجیر تجزیه ناپذیر است و یک زنجیر مارکف، تجزیه ناپذیر است اگر و فقط اگر گراف جهتدار آن همبند[1] قوی باشد [۴].

۱- Connection ، گراف G را همبند گویند ، اگر برای هر دو گره $u,v \in V(G)$ حداقل یک مسیر از u به v در این گراف موجود باشد.

۱-۴ سیستمهای توزیع و دریافت سرویس:

به طور کلی در یک سیستم توزیع و دریافت اشیایی وارد و تقاضای انجام حداقل یک سرویس یا خدمت را می کنند (اشیاء موقت). اشیاءدیگری (اشیاء دائم) از سیستم که وظیفه انجام خدمتهای تقاضا شده را دارند، در صورت امکان خدمات را بلافاصله انجام داده یا به‌علت اشتغال، واردین را منتظر نگهداشته تا زمانی که انجام خدمت یا خدمات تقاضا شده میسر گردد.

بعنوان مثال، سیستم های بانکی ، بیمارستانها، تعمیرگاهها، سیستم های کامپیوتری، سیستمهای ترافیک، آتش نشانی، فروشگاهها، موسسات حمل و نقل، سیستمهای تولید و انبار همه را می توان از رده سیستمهای توزیع و دریافت سرویس بشمار آورد.

با یک ملاحظه سریع بر چگونگی و تعداد اشیاء سرویس دهنده از یک طرف و خدمات تقاضا شده از طرف دیگر معلوم می گردد که سیستم های توزیع و دریافت انواع مختلف دارند. برحسب اینکه واردین به یک سیستم همه نیاز به یک نوع سرویس داشته یا سرویسهای مورد تقاضای آنها چندین نوع می باشد، در یک سیستم یک یا چندین وضعیتی ممکن است تشکیل گردد که هر وضعیتی برای انجام یک نوع سرویس می باشد. همچنین در یک سیستم ممکن است یک سرویس دهنده وجود داشته باشد یا چندین سرویس دهنده که همه یک نوع سرویس را انجام می دهند یا هر یک یک‌نوع خاص را. ترکیبات مختلف تعداد صفها (تعداد سرویسهای مورد تقاضا) و تعداد سرویس دهنده ها، سیستم های متفاوتی را مشخص می سازد.

مطلب دیگری که در سیستم های صفی دارای اهمیت می باشد چگونگی یا قانون انتخاب از بین اعضای صف برای سرویس دهی است. سرویس دهنده از بین منتظرین سرویس بر طبق قانون معین یکی را باید انتخاب کند، قوانین مختلفی ممکن است بکار گرفته شود. این قوانین یا برحسب زمان ورود یا بر حسب مدت زمانی که هر سرویس بطول می انجامد، زمان سرویس، یا برحسب مشخصه دیگری از اعضای صف تعیین می‌گردند [۷] .

۲- فرآیند کوتاهترین مسیر

کوتاهترین مسیر، کوتاهترین فاصله بین مبداء و مقصد می باشد که طول کمانها غیرمنفی و معلوم می باشد.

فرآیند کوتاهترین مسیر قطعی[1] : هزینه گذر برای هر کمان ثابت می باشد که توسط (۱۹۸۵) Bellman و (۱۹۷۴) Bazarra & Langley ارائه شده است.

فرآیند کوتاهترین مسیر تصادفی[2] : هزینه هر کمان یک متغیر تصادفی با توزیع احتمالی مشخص است که توسط (۱۹۷۸) Croucher ، (۱۹۷۶) Mirchandani و (۱۹۶۹) Frank ارائه شده است.

انواع الگوریتمهایی که برای حل مساله کوتاهترین مسیر ارائه شده است به صورت خلاصه معرفی می شود. ۱- الگوریتم دایجکسترا، ۲- الگوریتم فورد – بلمن، ۳- الگوریتم فلوید، ۴- الگوریتم برنامه ریزی پویا.

۲-۱ طول کوتاهترین مسیر تصادفی:

شبکه جهتدار $G : (V,A,S,t)$ باطول[3] کمانهایی‌که مستقل، نامنفی‌ودارای مقادیر صحیح تصادفی با دامنه متناهی تعریف شده است که توسط (۱۹۳۳) Corea & Kulkarni ارائه شده است.

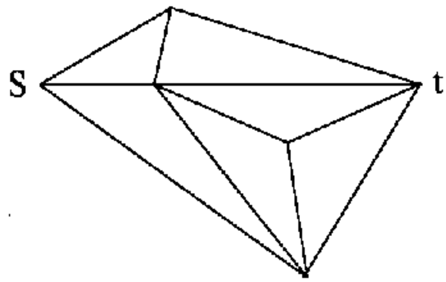
$L^* = \min_{p_i \in p} \{L(P_i)\}$: طول کوتاهترین مسیر تصادفی (S,t) در G

$P = \{ P_1, P_2, \dots, P_r \}$: مجموعه تمام مسیرهای (S,t) در G

$i = P_i$ امین مسیر (S,t) در G

$r =$ تعداد مسیرهای (S,t) در G

1. Deterministic Shortest Path Process
2. Stochastic Shortest Path Process
3. Length



شکل شبکه $G: (V, A, S, t)$

برای‌یافتن‌طول‌کوتاهترین مسیرتصادفی شبکه توسعه‌یافته $G : (\overline{V}, \overline{A}, S, t)$ در نظرگرفته می‌شود. شبکه توسعه یافته به صورت فرآیند تصادفی زنجیر مارکف زمان گسسته می‌باشد.

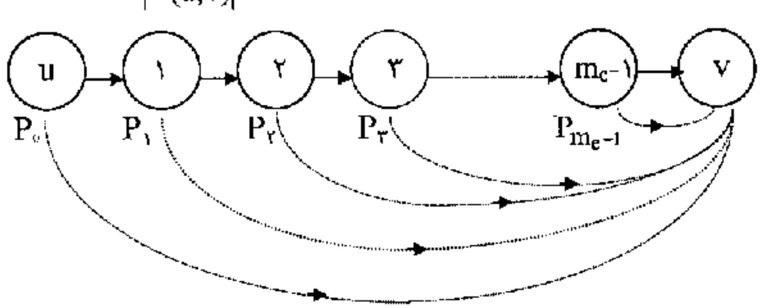
در شبکه توسعه یافته $\overline{G}$ از شبکه اصلی G برای هر $e = (u,v)$ ماهیت m_e بزرگترین مقدار ممکن طول L_e به صورت زیر تعریف می شود.

$$m_e = \min\{ n : pr\,(L_e \le n) = ۱ \}$$

هرکمان (u,v) در A بوسیله یک مینی شبکه acyclic[1] $G_{(u,v)} = (V_{(u,v)}\ ,\ A_{(u,v)})$ در نظر گرفته می شود.

$m_e - ۱ =$ گره های جدید در شبکه $\overline{G}$ $\quad$ $\left|V_{(u,v)}\right| = m_e + ۱$:گره ها در شبکه G

$۲\,m_e - ۱ =$ کمانهای جدید در شبکه $\overline{G}$ $\quad$ $\left|A_{(u,v)}\right| = ۲m_e$:کمانها در شبکه G



شکل جایگذاری شبکه $G_{(u,v)}$ در $\overline{G}$ برای کمان (u,v) در G

۱- acyclic ، شبکه ای که در آن مسیر جهتداری وجود نداشته باشد که نقطه ابتدا و انتها بر هم منطبق باشند acyclic می باشد و یا به عبارتی در آن هیچ دوری وجود نداشته باشد.

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع L_e به صورت زیر بیان می شود:

L_e تابع چگالی احتمال: $p'_i = p_r(L_e = i)$ $\quad i = 0,1,\ldots,m_e$

L_e تابع توزیع : $p_i = p_r(L_e \geq i)$ $\quad i = 0,1,\ldots,m_e$

برای هر $u, v \in \overline{V}$ مسیر (u, v) در $\overline{G}$ ارزان ترین مسیر نامیده می شود اگر هزینه آن برابر با مینیمم هزینه تمام مسیرهای(u, v) باشد. قضیه زیر در رابطه با طول کوتاهترین مسیر در G که دارای کم هزینه ترین مسیر در $\overline{G}$ است ، بیان می شود.

قضیه: توزیع کم هزینه ترین مسیر(S,t) در $\overline{G}$ مشابه توزیع L^* است.

اثبات: از این واقعیت نتیجه می شود که توزیع کم هزینه ترین مسیر (u, v) در $G_{(u,v)}$ برابر است با $L_{(u,v)}$ [۳] .

۲-۲ آنالیز کوتاهترین مسیر در شبکه توسعه یافته:

فرض میشود که حالتهایی از زنجیر مارکف زمان گسسته از یک تا N مرتب شده باشند وC مجموع کل هزینه لازم با توزیع طول کوتاهترین مسیر (S,t)در G باشد. جهت محاسبه توزیع گشتاورهای C از تکنیکهای زنجیر مارکف استفاده می شود [۳] .

اگر تابع توزیع C به صورت $F(n) = P_r(C \leq n) \quad 0 \leq n \leq N-1$باشد.

Kامین گشتاور C به صورت $T_k = \sum_{n=1}^{N-1} n^k (F(n) - F(n-1))$ بیان می شود، و لذا

$$T_k = (N-1)^k - [\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{K-1} \binom{k}{i} n^i F(n)]$$

بنابراین میانگین و انحراف معیار هزینه می تواند محاسبه شود:

$$E(C) = (N-1)^k - \sum_{n=0}^{N-2} F(n) = (2n-1)F(n)$$

$$E(C^2) = (N-1)^2 - \sum_{n=0}^{N-2} (2n-1)F(n)$$

$$\sigma = [E(C^2) - (E(C))^2]^{\frac{1}{2}}$$

۲-۳ فرآیند کوتاهترین مسیر تصادفی بطور بازگشتی[1] (SSPPR) :

ویژگیهای توزیع طول کوتاهترین مسیر تصادفی و یا متوسط آن همراه با روشهایی برای تعیین کردن آنها توسط (۱۹۷۶) Mirchandani و (۱۹۶۹) Frank و Larson & Odoni(۱۹۸۱) و ویژگی بازگشت توسط(۱۹۸۸) Andereatta & Romeo ارائه شده است.

۲-۴ مدل ریاضی SSPPR :

در شبکه تصادفی$G: (V, A , d)$ با مجموعه کمانهای A که زیر مجموعه ای از V×V می باشد مسیر P از S به t انتخاب شده است یکی از کمانهای این مسیر $\alpha = (v', v'')$ غیر فعال است و نمی توان از آن بهره برداری کرد (مانند حالتی که شخص بخواهد از یک گره ترافیکی سرویس دهنده فرار کند و مجبور باشد از یک گره توزیع سرویس دیگر استفاده کند).

شبکه$G: (V, \widetilde{A}, d)$ شبکه جهتدار تصادفی می باشد که $\widetilde{A}$ یک زیر مجموعه تصادفی از V×V است که از یک خانواده $F = \{ A_1 , A_2 , \ldots , A_r \}$ ، که عوامل آن A_i تحققهای $\widetilde{A}$ می باشند.

$i = 1 , 2 , \ldots, r$ $G_i = (V_i, A_i, d_i)$ ، شبکه جهتدار قطعی است و $\bigcap_{i=1}^{r} A_i$ مجموعه کمانهای قطعی و متمم آن $\bigcup_{i=1}^{r} A_i \setminus \bigcap_{i=1}^{r} A_i$ مجموعه کمانهای تصادفی نامیده می شود. اگر $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ باشد ، آنگاه $F_\alpha = \{A_i \in F, \alpha \in A_i\}$ می باشد.

فرض ۱) اندازه احتمال f روی F به صورت $f_i = p_r\{\widetilde{A} = A_i\} > 0$ می باشد.

1 . Stochastic Shorrtest Path Process with Recurse

فرض ۲) درباره وضعیت $\widetilde{G}$ اطلاعات جـــزئی مـــوجـــود است، کمـــان تصـادفی $\alpha = (\nu', \nu'')$ ممکن است فعال ویاغیرفعال‌باشد، در اینصورت به گره اولیه ν' بر می‌گردد.

فرض ۳) برای هر $\nu \in V$ ، حداقل یک مسیر از ν به t در هر حالت G_i وجود دارد.

۲-۵ محاسبه امید ریاضی[1] طول کوتاهترین مسیر تصادفی به طور بازگشتی:

مسیر P از S به t به صورت $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$ می باشد.

$R(\alpha_1)$ متوسط طول بازگشتی برای رفتن از $\nu_1' = S$ به t درصورتیکه α_1 غیرفعال باشد و

$R(\alpha_j)$ متوسط طول بازگشت بهینه برای رفتن از ν_j' به t در صورتی که α_j غیرفعال و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}$ برای $j = 2, \ldots, m$ فعال باشند.

متوسط طول مسیر P به صورت زیر تعریف می گردد:

$$E\{L(P)\} = [\sum_{j=1}^{m} d(\alpha_j)]\, \text{Prob}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \widetilde{A}\} +$$

$$\sum_{j=1}^{m} \{[\sum_{h=1}^{j-1} d(\alpha_h) + R(\alpha_j)]\text{Prob}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1} \in \widetilde{A} \text{ and } \alpha_j \notin \widetilde{A}\}\}$$

$$\text{Prob}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \widetilde{A}\} = \sum_{i=1}^{r} [f_i \prod_{j=1}^{m} X_i(\alpha_j)]$$

$$X_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha_j \in A_j \\ 0 & \text{O.W} \end{cases}$$

$$\text{Prob}\left\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1} \in \widetilde{A} \text{ and } \alpha_j \notin \widetilde{A}\right\} = \sum_{i=1}^{r} \left\{f_i \left[1 - X_i(\alpha_j)\right] \prod_{h=1}^{j-1} X_i(\alpha_h)\right\}$$

احتمال آن است که اولین ۱- j کمانهای مسیرفعال بوده وکمان j ام غیرفعال است [۱] .

1. Expectation

۳- نتیجه گیری

می توان اطلاعات در مورد کمانهای دورتر را بدست آورد، بجز مواردی که برای چنین اطلاعات مجبور به متحمل شدن هزینه ای شد.

به طور کلی خانواده مهم از مسائل مسیریابی روی شبکه ها، مربوط به مسائل مسیریابی تصادفی می باشند. این مسائل به دلیل کاربردهای زیادی که در جهان واقعی دارند از اهمیت خاصی برخوردارند و اخیرا پیشرفتهای قابل توجهی در بیان الگوریتمهای حل این نوع مسائل شده است. از کاربردهای مهم مسائل مسیریابی تصادفی، بطور خاص، می توان به این موارد اشاره کرد: طرحهای استراتژی برای سرویسهای توزیع و دریافت، سیستمهای بانکی، سیستمهای حمل و نقل، سیستمهای ارتباطات، زمانبندی شغلی، ساختارهای سازمانی و برنامه ریزی و کنترل پروژه های تحقیقات و توسعه و ... .

مآخذ

1- ANDERTTA.G and ROMEO.L, Stochastic Shortest Paths with Recourse, Networks 18 (1988) 193-204.

2- BONDY. J.A and MURTY.U.S.R, Graph Theory with Application.

3- COREA.P GEHAN.A, KULKARNI.VIDYADHAR.G, Shortest Paths in Stochastic Networks with Arc Lengths Having Discrete Distribution, Networks 23 (1993) 175-183.

۴- در آمدی بر نظریه گراف، تالیف ربین ج . ویلسون، ترجمه جعفر بی آزار.

۵- بهینه سازی (تئوری و کاربرد)، اس.اس. رائو، ترجمه سید محمد مهدی شهیدی پور.

۶- نخستین درس در فرآیندهای تصادفی، ساموئل کارلین، هووار دام. تیلور، ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده و دکتر عین ا... پاشا.

۷- شبیه سازی سیستمهای کامپیوترهای رقمی، تالیف دکتر حسن صالحی فتح آبادی.